Los números:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Para resolver

$x+3=0 \rightsquigarrow$ puedo en $\mathbb{Z}$

$2x+1=0 \rightsquigarrow$ " en $\mathbb{Q}$

$x^2=2 \rightsquigarrow$ " en $\mathbb{R} \rightsquigarrow$ agrego $\sqrt{2}$

$x^2=-1 \rightsquigarrow$ necesito agregar "$\sqrt{-1}$".

Definimos i a una solución de

$$x^2=-1.$$

Es decir, $i^2=-1$

Queremos agregar este "número" i a los reales y poder hacer operaciones que tengan sentido. ¿Cómo hacemos eso?

Definimos:

El conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{ a+b\cdot i, \text{ tal que } a,b \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = -1 \}$$

Ejemplos:

- $2+3i \to a=2,\ b=3$
- $-1+i \to a=-1,\ b=1$
- $2i \to a=0,\ b=2$
- $5 \to a=5,\ b=0.$

A esta forma de representar los números complejos como $a+bi$ se la llama forma binómica.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (los reales son un subconjunto de $\mathbb{C}$)

A cualquier real $a \in \mathbb{R}$,

lo puedo pensar como

$$a + 0 \cdot i = a$$

este es el b.

Dado un número complejo, que llamaremos z, en forma binómica

$z = a + bi$.

A este número real se lo llama parte imaginaria

A este número real se lo llama parte real.

y se usa la escritura: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$

de manera que $z = a + bi$

$= Re(z) + Im(z)\, i$

Ej:

$z = 2 - 3i$

$Re(z) = 2$, $Im(z) = -3$. (sin la i!)

Nota:

- Un complejo z es un número real si y solo si $Im(z) = 0$. Ej: $z = 2$.
- se dice que un complejo z es imaginario puro si $Re(z) = 0$ Ej: $z = 2i$.

¿Cómo se opera entre complejos?

SUMA:

Ejemplo:

$$2+3i+5-2i = 2+5+(3-2)i$$

$$= 7+i$$

Se define:

$$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$$

- Neutro para la +: $0+0.i=0$
- Opuesto de $a+bi$: $-a-bi$

$$2+3i+0 = 2+3i$$

$$-(2+3i) = \underbrace{-2-3i}$$

es el opuesto de $2+3i$

ya que $2+3i+(-2-3i)=0$.

PRODUCTO distributiva

$$(2+3i)\cdot(5-2i) =$$

$$2\cdot 5 + 3i\cdot 5 + 2\cdot(-2i) + 3i(-2i)$$

$$= 10 + \underbrace{15i - 4i}_{(15-4)i} - 6\cdot \underbrace{i^2}_{= -1}$$

$$= 10 + 11i - 6\cdot(-1)$$

$$= 16 + 11i.$$

Se define: (para que valga la distributiva)

$$(a+bi)\cdot(c+di) =$$

$$a\cdot c - \underbrace{b\cdot d}_{} + (ad+bc)\,i$$

viene de $bi\,di$

$$= b\cdot d\, i^2$$

$$= -bd$$

Ejercicio:

Calcular $i^2, i^3, i^4, i^5, \ldots$

- Neutro para el producto $1 = 1 + 0 \cdot i$

- Inverso? Más adelante.

Pero hagamos un ejemplo a ojo:

Dado $z = i$, busco su inverso z^{-1} que es aquel que tiene la propiedad que

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

$$i \cdot z^{-1} = 1.$$

¿Quién será?

Sabemos que $i \cdot i = -1$

$$\Rightarrow \qquad i \cdot (-i) = 1$$

Este es el inverso z^{-1} que buscábamos.

Valen las mismas buenas propiedades de los operaciones en $\mathbb{R}$

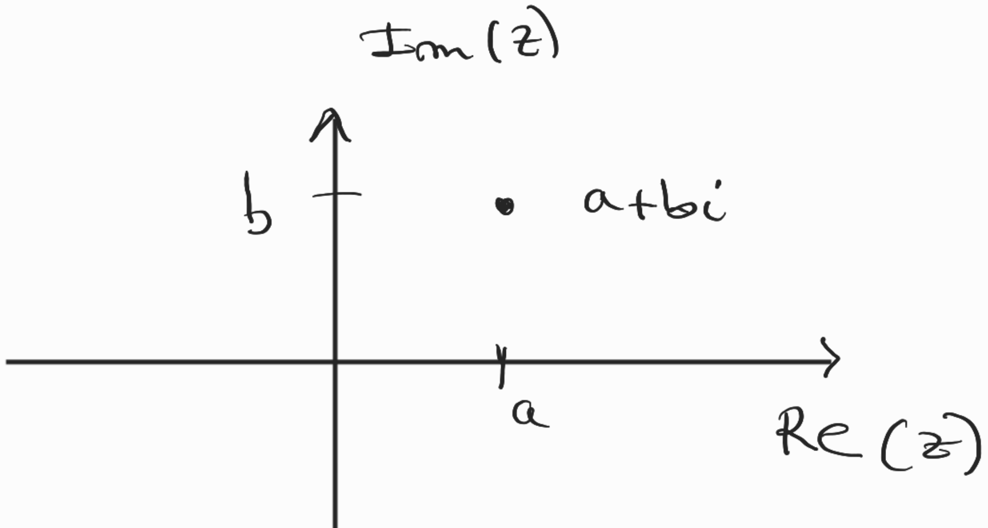
$+$ y $\cdot$ son asociativas, conmutativas y vale la distributiva.

Representación gráfica de los números complejos.

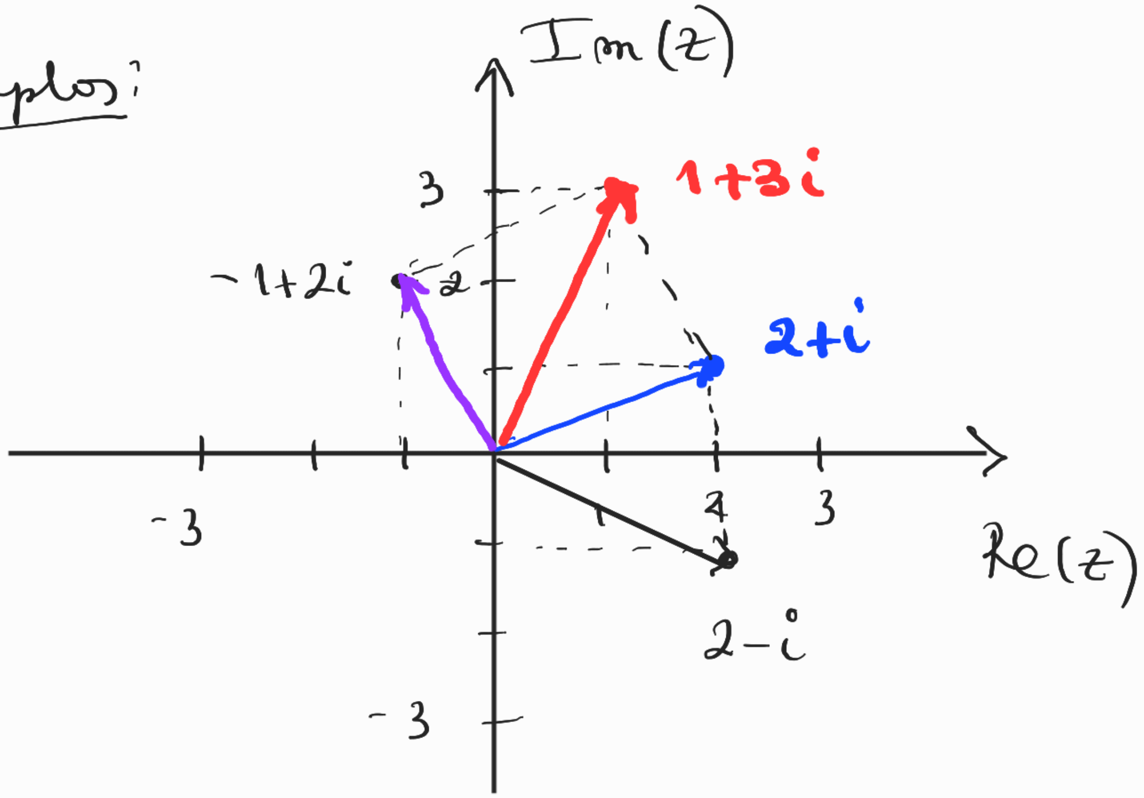
Los números complejos se representan como en $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$$

$$z = a+bi \qquad (a,b)$$



Ejemplos:



$2+i+(-1+2i)=1+3i$

Sobre el eje "Re(z)" van a estar los números reales $a+0\cdot i=a\in\mathbb{R}$

Módulo

Se define (como en $\mathbb{R}^2$) la distancia al origen y se lo llama **módulo de z** y se nota $|z|$.

Definición: Dado $z=a+bi\in\mathbb{C}$, se define $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Notar que

$$d(a+bi, 0) = d((a,b),(0,0))$$ pensado en $\mathbb{R}^2$ como vimos gráficam.

$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

<u>OBSERVAR</u>: $|z|$ es real y $|z| \geq 0$.

<u>Ejemplo</u>:

$z = 2+i$ $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

$z = 2-i$ $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow |2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$

$z = -1+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

$z = 1+3i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$z = 2 \Rightarrow |z| = 2$

$z = -2 \Rightarrow |z| = 2$

(para $z \in \mathbb{R}$ es el módulo de siempre).

<u>Propiedades de módulo</u>:

Dados $z, w \in \mathbb{C}$

1) $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Porque: $(\Longleftrightarrow)$

si $z = a+bi$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 0$ si y solo si $a^2+b^2 = 0$ y esto pasa si y solo si $a=0 \wedge b=0$ (es decir $z=0$).

2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Quien quiera ver la validez de esta propiedad puede hacer $z=a+bi$, $w=c+di$ y plantear la igualdad....

Ej:

$|2 \cdot (1+2i)| = |2| \cdot |1+2i| = 2\sqrt{5}$

$|(1+2i)(1-2i)| = |1+2i|\,|1-2i| = \sqrt{5}^{\,2} = 5$

3) $|z^n| = |z|^n$.

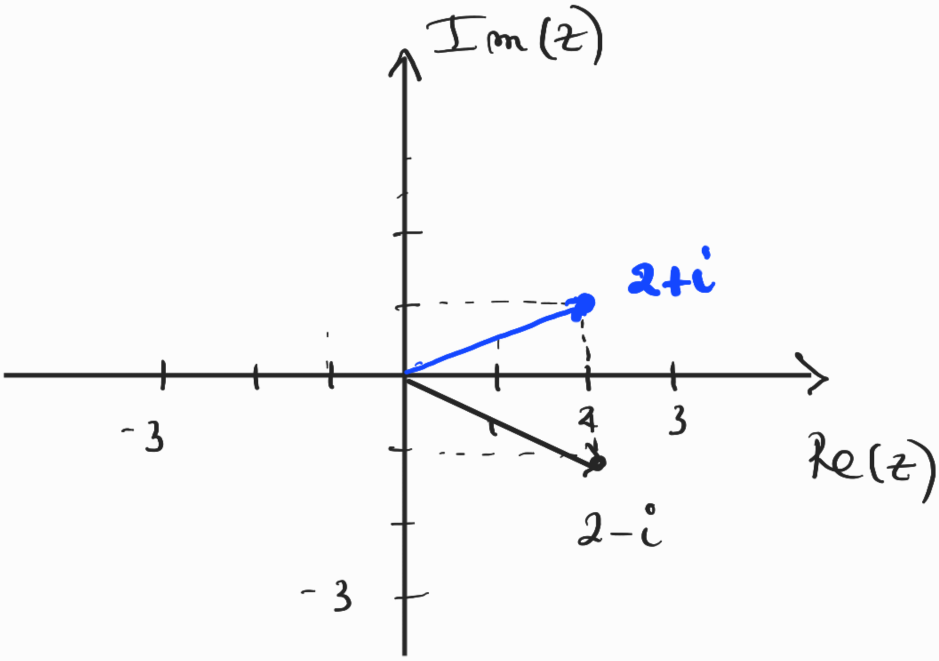
Esta propiedad es una consecuencia de 2) (pensar por qué).

Ej: $|(1+2i)^6| = |1+2i|^6 = (\sqrt{5})^6 = 125$.

Conjugado:

Dado $z = a+bi \in \mathbb{C}$, se define el conjugado de z y se nota $\bar{z}$ al número complejo $z = a-bi$.

Geométricamente, es el reflejado respecto del eje $Re(z)$.



Ej: $2-i$ es el conjugado de $2+i$, esto se escribe así

le cambiamos el signo

$$\overline{2+i} = 2-i$$

queda igual

Otro ej: $\overline{3-2i} = 3+2i$

Veamos además qué pasa si hacemos

$$\underbrace{(3-2i)}_{z}\cdot\underbrace{(3+2i)}_{\overline{z}}$$

$$= 3\cdot 3 + 3\cdot\cancel{2i} - 2\cancel{i}\cdot 3 \underbrace{-2i\cdot 2i}_{-4i^2=4}$$

$$= 9+4 = 13$$

$$|3-2i| = \sqrt{3^2+(-2)^4} = \sqrt{13}$$

Esto vale en general:

Si $z = a+bi$

$$z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2.$$

¡Esta es una propiedad muy útil!

Nos permite por ejemplo calcular el inverso de un número complejo (siempre que no sea cero como se verá).

Del ejemplo: para $z = 3-2i$

$(3-2i)(3+2i) = 13$, entonces

$$(3-2i) \cdot \frac{(3+2i)}{13} = 1$$

Este es un complejo que en forma binómica se escribe $\frac{3}{13} + \frac{2}{13} i$ y que funciona de inverso de $z = 3-2i$

Recordemos que el inverso de $z \in \mathbb{C}$ es el número complejo (que se escribe z^{-1}) que satisface que

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

De lo anterior vemos que si

$$z = 3 - 2i \Rightarrow z^{-1} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13} i.$$

(Chequear que $z \cdot z^{-1} = 1$)

Valen las siguientes propiedades:

Dados $z, w \in \mathbb{C}$:

1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

3) $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$

Para quien quiera mostrar la veracidad de estas propiedades, pueden tomar

4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

5) Si $z \neq 0$

$z = a + bi$

$w = c + di$

y verificarlas.

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Además: (convencerse de su validez)

1) $\overline{\overline{z}} = z$.

2) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

3) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

4) $z = \overline{z}$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$.